

# Mathematics

מבנים מתמטיקה

## חוברת תרגילים

### חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי – קורס ראשון

#### תוכן עניינים

3.....	הקדמה
4.....	גבולות של פונקציות
4.....	שאלה מספר 1 – חישוב גבול
5.....	שאלה מספר 2 – חישוב גבול
6.....	שאלה מספר 3 – חישוב גבול
7.....	שאלה מספר 4 – הערך השלם
8.....	הגדרת הגבול
8.....	שאלה מספר 5 – הגדרת הגבול
9.....	רציפות וגזירות
9.....	שאלה מספר 6 – רציפות וגזירות בנקודה
10.....	משפטים יסודיים
10.....	שאלה מספר 7 – מספר פתרונות למשוואה
11.....	שאלה מספר 8 – חד-חד-ערכיות ועל
12.....	שאלה מספר 9 – משפט לגרנז'
13.....	טור טיילור
13.....	שאלה מספר 10 – הערכת מספר באמצעות טור טיילור
14.....	שאלה מספר 11 – אי-שוויון בעזרת טור טיילור
15.....	חקירת פונקציה
15.....	שאלה מספר 12 – נקודות קיצון ונקודות פיתול
16.....	סדרות
16.....	שאלה מספר 13 – חישוב גבול
17.....	שאלה מספר 14 – חישוב גבול
18.....	שאלה מספר 15 – חישוב גבול
19.....	אינטגרלים לא מסוימים
19.....	שאלה מספר 16 – פירוק לשברים חלקיים

- שאלה מספר 17 – פירוק לשברים חלקיים ..... 20
- שאלה מספר 18 – אינטגרציה בחלקים ..... 21
- שאלה מספר 19 – אינטגרלים טריגונומטריים ..... 22
- שאלה מספר 20 – אינטגרלים טריגונומטריים של פונקציות הפוכות ..... 23
- שאלה מספר 21 – אינטגרלים מידיים ..... 24
- אינטגרלים מסוימים** ..... 25
- שאלה מספר 22 – אינטגרל מסוים ..... 25
- שאלה מספר 23 – כלל לייבניץ ..... 26
- אינטגרלים מוכללים** ..... 27
- שאלה מספר 24 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון ..... 27
- שאלה מספר 25 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון ..... 28
- שאלה מספר 26 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון ..... 29
- שאלה מספר 27 – אינטגרל מוכלל מסוג שני ..... 30
- שאלה מספר 28 – אינטגרל מוכלל מסוג שני ..... 31
- טורים – מבחני השוואה** ..... 32
- שאלה מספר 29 – טורים חיוביים ..... 32
- שאלה מספר 30 – טורים חיוביים ..... 33
- שאלה מספר 31 – טורים חיוביים ..... 34
- שאלה מספר 32 – טורים חיוביים ..... 35
- שאלה מספר 33 – טורים כלליים ..... 36
- שאלה מספר 34 – טורי  $lan$ -ים ..... 37
- שאלה מספר 35 – טורי  $lan$ -ים ..... 38
- שאלה מספר 36 – הכללה לטורי  $lan(n)$  ..... 39
- שאלה מספר 37 – התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי ..... 40
- שאלה מספר 38 – התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי ..... 41
- טורי חזקות** ..... 42
- שאלה מספר 39 – תחום התכנסות ..... 42
- שאלה מספר 40 – תחום התכנסות של טור מוזז ..... 43
- שאלה מספר 41 – סכום הטור – אינטגרציה וגזירה איבר-איבר ..... 44
- שאלה מספר 42 – סכום הטור – אינטגרציה וגזירה איבר-איבר ..... 45

## הקדמה

שלום,

לפניכם חוברת הניתנת לכל מי שצופה בקורס עם חן הררי באתר סטאדיס [www.Studies.co.il](http://www.Studies.co.il).  
נא קראו בעיון את הדברים הבאים לפני שאתם מתחילים לעבוד עם החוברת.

### איך לעבוד נכון עם חוברת התרגילים?

חוברת התרגילים מכילה את כל השאלות שאוהבים לשאול במבחנים ושמופיעות בכל סמסטר במבחנים. את החוברת הזאת בניתי לאחר שנים של ניסיון בהוראת הקורס, החל מהסמסטר השלישי שלי בטכניון שבו כבר התחלתי לתרגל את הקורס ועד היום. כל השאלות בחוברת הן שאלות ברמת בחינה שנועדו להכין אתכם באופן הטוב ביותר לקראת הבחינה. כדי לעבוד נכון עם החוברת, אנא שימו-לב לדגשים הבאים:

**(1) הפתרונות באתר –** לחוברת זו אין פתרונות כתובים, את הפתרונות המלאים ניתן למצוא בקורס המצולם באתר סטאדיס.

**(2) נסו לפתור לבד –** מומלץ מאוד לנסות לפתור כל שאלה בעצמכם, לפני שאתם צופים בפתרון ביחד איתי.

**(3) לא להיתקע על שאלות –** מצד שני, היזהרו שלא להיתקע יותר מידי זמן על שאלות – אם לא הצלחתם בעצמכם תוך 5 דקות, הפעילו את הסרטון וצפו בפתרון, הזמן שלכם יקר וצריך לנהל אותו נכון ויעיל.

**(4) חזרתיות –** כפי שהמורה שלי תמיד היה אומר:

**"לפעמים עדיף לפתור אותו תרגיל פעמיים, מאשר שניים חדשים"**

לכן טוב לחזור לתרגילים שכבר צפיתם בהם ולנסות לפתור אותם שוב, עד שהאסימון יפול. זכרו שאלו הן השאלות שמופיעות בכל סמסטר במבחנים, לכן כדאי להבין היטב איך פותרים אותן.

בהצלחה!

## גבולות של פונקציות

שאלה מספר 1 – חישוב גבול

חשב את הגבול הבא:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left( \frac{2x}{\pi} \right)^{\tan x}$$

## שאלה מספר 2 – חישוב גבול

חשב את הגבול הבא:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} \sin 2x}{x}$

שאלה מספר 3 – חישוב גבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x \cdot \arctan x \cdot (e^x - 1)}{\sin x \cdot \ln^2(x+1)}$$

חשב את הגבול הבא:

שאלה מספר 4 – הערך השלם

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x] \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x + 1] \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} ([x] \cdot [x + 1]) \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (\text{ד})$$

## הגדרת הגבול

שאלה מספר 5 – הגדרת הגבול

הוכח לפי הגדרת הגבול כי:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{3x-2} = -1$



## רציפות וגזירות

### שאלה מספר 6 – רציפות וגזירות בנקודה

הוכח / הפרך את הטענות הבאות עבור שתי פונקציות  $f(x)$  ו-  $g(x)$  :

(א) אם  $f(x)$  לא רציפה ב-  $x_0$  ו-  $g(x)$  לא רציפה ב-  $x_0$  אזי גם  $\frac{f(x)}{g(x)}$  לא רציפה ב-  $x_0$ .

(ב) אם  $f(x)$  לא גזירה ב-  $x_0$  ו-  $g(x)$  לא גזירה ב-  $x_0$  אזי גם  $f(x)g(x)$  לא גזירה ב-  $x_0$ .

## משפטים יסודיים

### שאלה מספר 7 – מספר פתרונות למשוואה

נתונה הפונקציה:  $f(x) = x^2 + x + \sin x$ . מצא את מספר השורשים הממשיים של  $f$ .

שאלה מספר 8 – חד-חד-ערכיות ועל

נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^x + x + 1$

(א) הוכח כי הפונקציה חד-חד-ע בכל  $\mathbb{R}$

(ב) הוכח כי הפונקציה על  $\mathbb{R}$

(ג) מצא כמה שורשים יש למשוואה  $f(x) = 0$

(ד) הוכח כי  $f$  הפיכה וחשב את  $(f^{-1})'(e+2)$

שאלה מספר 9 – משפט לגרנז'

הוכח כי לכל  $x \geq 0$  מתקיים:  $\arctan x \geq \frac{x}{1+x^2}$ .

## טור טיילור

שאלה מספר 10 – הערכת מספר באמצעות טור טיילור

חשב את המספר  $\sqrt{65}$  בדיוק של אלפית.

שאלה מספר 11 – אי-שוויון בעזרת טור טיילור

הוכח שלכל  $x > 0$  מתקיים אי-השוויון הבא:  $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

## חקירת פונקציה

### שאלה מספר 12 – נקודות קיצון ונקודות פיתול

הוכח / הפרך את הטענות הבאות:

- (א) אם בנקודה  $x_0$  הפונקציה  $f$  מוגדרת, אבל  $f'(x_0)$  לא קיימת, אזי  $x_0$  לא נקודת קיצון.
- (ב) אם בנקודה  $x_0$  הפונקציה  $f$  גזירה פעמיים,  $f'(x_0) = 0$  ו-  $x_0$  אינה נקודת קיצון מקומית, אזי בנקודה זו יש פיתול.
- (ג) אם  $x_0$  היא נקודת קיצון מקומית של הפונקציה אזי בהכרח היא לא נקודת פיתול שלה.

## סדרות

שאלה מספר 13 – חישוב גבול

חשב את הגבול הבא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(2n)}{\ln(n)} \right)^{\ln n}$$



שאלה מספר 14 – חישוב גבול

חשב את הגבול הבא:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \operatorname{tg} \left( \frac{1}{n} \right) \right)^n$

שאלה מספר 15 – חישוב גבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n! \sin(n^2)}{n^n} \quad \text{חשב את הגבול הבא:}$$

## אינטגרלים לא מסוימים

שאלה מספר 16 – פירוק לשברים חלקיים

חשב את האינטגרל הבא:  $\int \frac{8x+3}{x^2(x^2+2x+3)} dx$

שאלה מספר 17 – פירוק לשברים חלקיים

חשב את האינטגרל הבא:  $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$

## שאלה מספר 18 – אינטגרציה בחלקים

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \ln x dx \quad (\text{א})$$

$$\int \ln(4x^2 + 3) dx \quad (\text{ב})$$

שאלה מספר 19 – אינטגרלים טריגונומטריים

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \tan x dx \quad (\text{א})$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (\text{ב})$$

## שאלה מספר 20 – אינטגרלים טריגונומטריים של פונקציות הפוכות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \arctan x dx \quad (\text{א})$$

$$\int \arcsin x dx \quad (\text{ב})$$

## שאלה מספר 21 – אינטגרלים מידיים

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (\text{א})$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (\text{ב})$$



## אינטגרלים מסוימים

### שאלה מספר 22 – אינטגרל מסוים

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx \quad (\text{א})$$

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx \quad (\text{ב})$$

שאלה מספר 23 – כלל לייבניץ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{t^2 + 1} dt}{\sqrt{x}}$$

חשב את הגבול הבא:

## אינטגרלים מוכללים

שאלה מספר 24 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון

בדוק את התכנסות האינטגרל  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 - x^3}} dx$

שאלה מספר 25 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון

לפניך 3 אינטגרלים מוכללים:  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$ ,  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$

איזה טענה מהטענות הבאות נכונה:

(א) שלושתם מתבדרים.

(ב) שניים מתבדרים ואחד מתכנס.

(ג) שניים מתכנסים ואחד מתבדר.

(ד) שלושתם מתכנסים.

## שאלה מספר 26 – אינטגרל מוכלל מסוג ראשון

בדוק את התכנסות/התבדרות האינטגרלים המוכללים הבאים:

$$. p \in \mathbb{R} , \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (\alpha)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin^2(\sqrt[4]{x})} dx \quad (\beta)$$

$$. p \in \mathbb{R} , \int_0^1 \frac{x - \sin x}{x^p} dx \quad (\gamma)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^3}} dx \quad (\delta)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^4} dx \quad (\epsilon)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} dx \quad (\zeta)$$

## שאלה מספר 27 – אינטגרל מוכלל מסוג שני

בדוק את התכנסות/התבדרות האינטגרלים המוכללים הבאים:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \quad (\text{א})$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \quad (\text{ב})$$

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx \quad (\text{ג})$$

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln(\ln x)} dx \quad (\text{ד})$$

שאלה מספר 28 – אינטגרל מוכלל מסוג שני

בדוק את התכנסות/התבדרות האינטגרלים המוכללים הבאים:  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^8 + \sqrt{x}} dx$

## טורים – מבחני השוואה

שאלה מספר 29 – טורים חיוביים

בדוק את התכנסות/התבדרות הטור הבא:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{2n}}{n^n}$



שאלה מספר 30 – טורים חיוביים

בדוק את התכנסות/התבדרות הטור הבא:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$

שאלה מספר 31 – טורים חיוביים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n^4 + 5n^3 + \sin^2(n)}{n^7 + 6n^4 + 1}}$$

בדוק את התכנסות/התבדרות הטור הבא:

שאלה מספר 32 – טורים חיוביים

בדוק את התכנסות/התבדרות הטור הבא:  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

## שאלה מספר 33 – טורים כלליים

בדוק את התכנסות/התבדרות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} \quad (\text{א})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} (-1)^n \quad (\text{ב})$$

## שאלה מספר 34 – טורי $\ln$ -ים

בדוק את התכנסות/התבדרות הטור הבא:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

## שאלה מספר 35 – טורי lan-ים

בדוק את התכנסות/התבדרות הטור הבא:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$

שאלה מספר 36 – הכללה לטורי  $\ln(n)$

נתונים הטורים:  $A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n+1}$  ,  $B = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3+1}$

אזי:

א. טור A מתבדר וטור B מתכנס.

ב. טור A מתכנס וטור B מתבדר.

ג. שני הטורים A ו-B מתכנסים.

ד. שני הטורים A ו-B מתבדרים.

שאלה מספר 37 – התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

$$A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} \quad \text{נתונים הטורים:}$$

אזי:

- א. הטור A מתבדר, הטור B מתכנס בתנאי.
- ב. הטור A מתכנס בתנאי, הטור B מתבדר.
- ג. הטור A מתכנס בתנאי, הטור B מתכנס בהחלט.
- ד. הטור A מתכנס בהחלט, הטור B מתכנס בתנאי.
- ה. אף אחד מן הטורים איננו מתכנס בהחלט.



שאלה מספר 38 – התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right), \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} n \left( 1 - \cos \left( \frac{1}{n} \right) \right)$$

נתונים הטורים:

אזי:

- א. טור A מתכנס בהחלט וטור B מתכנס.
- ב. טור A מתכנס בהחלט וטור B מתבדר.
- ג. טור A מתכנס בתנאי וטור B מתכנס.
- ד. טור A מתכנס בתנאי וטור B מתבדר.
- ה. טור A מתבדר וטור B מתבדר.

## טורי חזקות

### שאלה מספר 39 – תחום התכנסות

מצא את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n \quad (\text{א})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (x-1)^n \quad (\text{ב})$$

## שאלה מספר 40 – תחום התכנסות של טור מוזז

תן דוגמא לטור חזקות  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  שתחום התכנסותו הוא בדיוק בקטע  $(1, 3]$ .

## שאלה מספר 41 – סכום הטור – אינטגרציה וגזירה איבר-איבר

$$\text{נתון הטור הבא: } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

(א) מצא את תחום ההתכנסות של הטור.

(ב) מצא נוסחה מפורשת ל-  $f(x)$  בתחום ההתכנסות. חשב את  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

(ג) העזר בסעיף ב' ומצא נוסחה מפורשת ל-  $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ . חשב את  $h\left(\frac{1}{2}\right)$ .

שאלה מספר 42 – סכום הטור – אינטגרציה וגזירה איבר-איבר

נתון טור החזקות:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n}$ .

(א) מצא את תחום ההתכנסות של הטור.

(ב) האם  $f$  גזירה ב-  $x = 1$ ? אם כן, חשב את  $f'(1)$ .

(ג) מצא נוסחה מפורשת ל-  $f(x)$ .

(ד) כמה מחוברים צריך לסכום בטור על-מנת לחשב את  $f(-1)$  בשגיאה שלא תעלה על עשירית?